Übungen zur Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“ im WS 2002/03

Blatt 2 28. Oktober 2002

---

1 Sei (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Bestimmen Sie $C^\infty(M) \cap \ker \Delta$, d.h. die 0-Formen in $\ker \Delta$.

(b) Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Eigenfunktion von Δ, d.h.

$$\Delta f = \lambda f$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch df eine Eigenfunktion von Δ ist.

(c) Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass für alle 1-Formen ω gilt

$$\langle \mathcal{K}^1 \omega, \omega \rangle \geq C \langle \omega, \omega \rangle.$$

Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Eigenfunktion von Δ zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie

$$\lambda \geq C.$$

2 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Metrik g definiert eine Metrik auf dem Kotangentialbündel $T^*M \to M$ (siehe z.B. Diffgeo 2, Bär, Bündeltheorie §24). Berechnen Sie die Krümmung des Bündels $T^*M \to M$. Was ist der Krümmungsendomorphisms auf T^*M?

3 Sei (V, g) ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und W ein (komplexer) Clifford-Modul für (V, g). Sei

$$d(n) := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Die (komlexe) Dimension von W ist durch $d(n)$ teilbar. (Tipp: Nehmen Sie eine ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ von V und nutzen Sie, dass die Endomorphismen $e_i \cdot : W \to W$ paarweise antikommutieren.)

(b) Konstruieren für $n = 1, 2, 3$ (und je nach Lust und Laune auch für größere n) möglichst viele Clifford-Moduln der Dimension $d(n)$.

(Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass jeder Clifford-Modul direkte Summe von Clifford-Moduln der Dimension $d(n)$ ist.)

Abgabe: Möglichst Montag, 4.11.02 oder spätestens am darauffolgenden Donnerstag.
Bitte geben Sie Ihren Namen auf ihren Lösungen an.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/analysis`