Übungen zur Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“ im WS 2002/03

Blatt 3 — 4. November 2002

---

1 Sei $\varphi : T^n \to T^n$ ein Diffeomorphismus des Standard-Torus. Zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$:

1. $C^k(T^n) \to C^k(T^n), \quad u \mapsto u \circ \varphi$ ist wohldefiniert und stetig.
2. $H_k \to H_k, \quad u \mapsto u \circ \varphi$ ist wohldefiniert und stetig.
   (Tipp: Arbeiten Sie mit der zu $\| \cdot \|_k$ äquivalenten Norm $\sum_{j=0}^k \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u \right\|_0$.)

2 Sei $\mathrm{cl} : T^*M \otimes W \to W$ die Clifford-Mulitplikation eines Clifford-Bündels W über einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Berechnen Sie $\mathrm{cl}^\#$ und $\mathrm{cl}^\# \circ \mathrm{cl}$.

3 Sei W ein Clifford-Modul für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Metrik und der Standard-Basis $e_1, \ldots, e_n$. Wir definieren $\mathrm{clvol} \in \mathrm{End}(W)$ durch $\mathrm{clvol}(w) := e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \cdot w$.

(a) Berechnen Sie clvol^2.

(b) Überlegen Sie, ob e_k mit clvol kommutiert oder antikommutiert.

(c) Sei n gerade. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $v_n \in \{1, i\}$, so dass W mit der folgenden Clifford-Multiplikation ein Clifford-Modul für $\mathbb{R}^{n+1}$ ist:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^{n+1} \otimes W & \to & W & \\ e_k \otimes w & \mapsto & e_k \cdot w & \forall k = 1, .., n \\ e_{n+1} \otimes w & \mapsto & v_n \, \mathrm{clvol}(w). & \end{array}$$

Bestimmen Sie den Vorfaktor v_n.

(d) Sei n ungerade. Zeigen Sie: Der Vektorraum $W' = W \oplus W$ versehen mit der folgenden Clifford-Multiplikation, ist ein Clifford-Modul für den euklidischen $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^{n+1} \otimes (W \oplus W) & \to & (W \oplus W) & \\ e_k \otimes (w_1, w_2) & \mapsto & (e_k \cdot w_1, -e_k \cdot w_2) & \forall k = 1, .., n \\ e_{n+1} \otimes (w_1, w_2) & \mapsto & (-w_2, w_1). & \end{array}$$

Abgabe: Möglichst Montag, 11.11.02 oder spätestens am darauffolgenden Donnerstag.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/analysis`