Übungen zur Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten"
im WS 2002/03

Blatt 6 2. Dezember 2002

1

Sei V ein Vektorbündel über M von Rang k und sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf V. Sei E_m eine Basis von V_m, der Faser von V in m, also in anderen Worten $E_m \in P_{GL}(V)$ und $\pi(E_m) = m$. Wir definieren einen Unterraum H_{E_m} von $T_{E_m}P_{GL}(V)$ wie folgt: Zunächst wählen wir zu $X \in T_mM$ eine Kurve $\gamma_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma_X(0) = m$, $\dot\gamma(0) = X$. Wir verschieben E_m parallel längs γ. Dies definiert eine glatte Kurve $\tilde\gamma_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to P_{GL}(V)$.
Zeigen Sie:

(a) $\dot{\tilde\gamma}_X(0)$ ist unabhängig von der Wahl der Kurve γ_X.

(b)
$$H_{E_m} := \left\{\dot{\tilde\gamma}_X(0) \mid X \in T_mM\right\}$$
ist eine $GL(k, \mathbb{R})$-äquivariante Distribution von Horizontalräumen auf $P_{GL}(V)$.

(c) Ist der Zusammenhang metrisch, so liefert die analoge Konstruktion eine $SO(k)$-äquivariante Distribution von Horizontalräumen auf $P_{SO}(V)$.

(d) Ist V ein komplexes Vektorbündel von komplexem Rang $m = k/2$, und ist ∇ ein Zusammenhang auf dem komplexen Vektorbündel V, so liefert die analoge Konstruktion eine $U(m)$-äquivariante Distribution von Horizontalräumen auf $P_U(V)$.

2

Sei M eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Spin-Struktur. Zeigen Sie:

(a) Ist n gerade, so gibt es einen Isomorphismus
$$\mathrm{End}(\Sigma M) \to \Lambda^* T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$
der den Zusammenhang erhält.

(b) Ist n ungerade, so gibt es einen Isomorphismus
$$\mathrm{End}(\Sigma M) \to \Lambda^{even} T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$
der den Zusammenhang erhält.

Abgabe: Möglichst Montag, 9.12.02 oder spätestens am darauf folgenden Donnerstag.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/analysis`