Zusammenhänge

Seminar Differentialgeometrie: Eichtheorie
FB Mathematik, Uni Hamburg im Sommersemester 2003

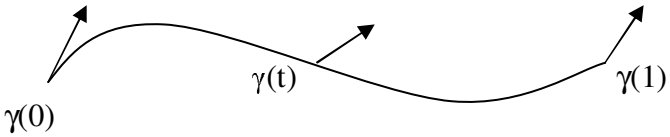
Vortrag von Mihaela Pilca

06.05.2003

(A) Ursprung der Idee vom Zusammenhang
(B) Definition und Eigenschaften
(C) Zusammenhänge und Paralleltransport (Parallelverschiebung)

(A) Warum betrachten wir Zusammenhänge ?

- Die Idee des Zusammenhangs ist sehr stark mit der Idee von Paralleltranport verbunden.
- Wir haben eine Kurve γ auf einer Mannigfaltigkeit M und wir wollen Tangentialvektoren in Tangentialräume in zwei verschiedenen Punkte der Kurve vergleichen, und zwar für jede zwei Punkte der Kurve.



Es wäre gut, wenn wir zu dieser Kurve einen linearen Isomorphismus assozieren könnten, so dass wir die Tangentialräume in zwei verschiedenen Punkten der Kurve vergleichen können, d.h. wir definieren eine Kurve in TM (Tangentialbündel) : eine „horizontale“ Kurve von Vektoren. Die Möglichkeit ein solcher „horizontalen Lift“ zu haben, bedeutet die Existenz des Zusammenhangs, so dass der Zusammenhang eine Möglichkeit ist, in jedem Tangentialraum T_vTM einen „horizontalen“ Untertangentialraum isomorph zu T_xM zu wählen. Auf diese Weise haben wir eine Äquivalenz zwischen einen horizontalen Distribution und dem Paralleltransport auf der Kurve.

Warum Zusammenhänge auf Prinzipalbündel?

Statt Vektorfelder können wir irgendwelche Objekte, die Schnitte in einem Bündel sind, betrachten.

Wir können also verallgemeinern:

Tangentialbündel $\longrightarrow$ Vektorbündel

Und dann bemerkt man, dass jeder Vektorbündel kanonisch assoziert zu einem Prinzipalbündel (Rahmenbündel) ist und es gibt auch eine Korrespondenz:

Der Zusammenhang $\longleftrightarrow$	Der lineare Zusammenhang
in Prinzipalbündeln	(oder Kovariante Ableitung) in den asozierten Vektorbündeln

Bemerkung:

Wenn die Mannigfaltigkeit eine zusätzliche Struktur besitzt (z.B. riemannsche Metrik, komplexe Struktur ...) übersetzt man das in einer Reduktion der strukturalen Gruppe (z.B. für die riemannsche Metrik ist O(n) oder SO(n), falls die Mannigfaltigkeit orientiert ist) und das übersetzt man weiter in der Eigenschaften des Zusammenhangs, da der Zusammenhang kompatibel mit der Gruppe in einer präzisen Sinne ist: die rechten Translationen invarieren die horizontale Distribution des Zusammenhangs.

(B) Definition und Eigenschaften

- Prinzipalbündel

Definition: (P,G,M) heißt ein C^∞ **Prinzipalbündel** wenn die Folgenden gelten:

P,M sind C^∞ Mannigfaltigkeiten

G ist eine Lie Gruppe

(1) G operiert frei rechts von P

(2) M ist der Quotientraum von P durch G

$\pi: P \to M$ ist C^∞

(daraus folgt, dass $\forall m \in M$, G operiert transitiv auf $\pi^{-1}(m)$)

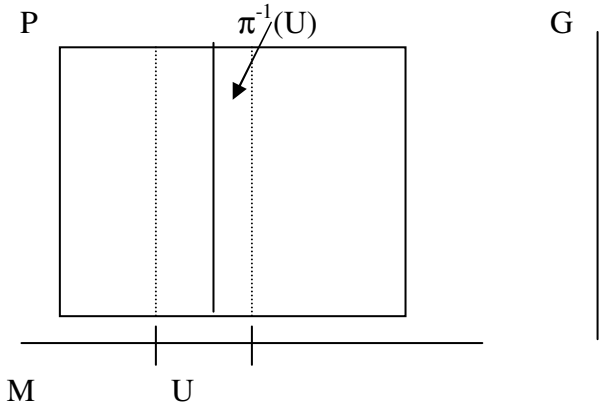
(3) P ist lokal trivial:

$\forall m \in M$ $\exists U$ eine Umgebung von m und eine C^∞ Abbildung $F_U: \pi^{-1}(U) \to G$,

so dass $F_U o R_g = R_g o F_U$ für jede $g \in G$

und $\pi^{-1}(U) \to U \times G$

$p \to (\pi(p), F_U(p))$ ist ein Diffeomorphismus.



P= Bündelraum (Totalraum)

M=Basisraum

G= Struktural-Gruppe

$\pi^{-1}(m)$= Faser über m für alle $m \in M$

! Die Faser sind diffeomorph mit G via $p: G \to \pi^{-1}(\pi(p)) \subset P$

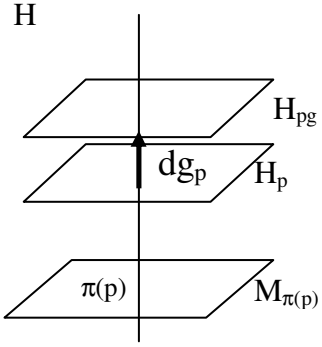
(p ist surjektiv, weil G transitiv auf Faser operiert und injektiv, weil G frei operiert)

dimP = dimG +dimM

Die Rechtswirkung von G auf P liefert uns die nächsten Abbildungen, die wir weiter benutzen werden um in jeden Tangentialraum P_p vertikale und horizontale Vektoren zu definieren.

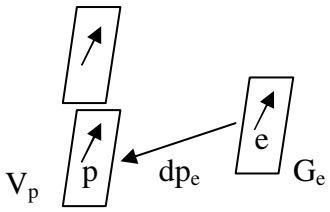
$g: P \to P$ Diffeomorphismus
$g(p) = pg$
$dg_p: P_p \to P_{pg}$

H



$p: G \to P$ Injektion
$p(g) = pg$
$dp_e: G_e \to P_p$

V



- Wir konstruieren:
  V = eine dimG – dimensionale Distribution auf P von „vertikalen Vektoren“, d.h.
  $\forall p \in P \quad V_p = \{t \in P_p \mid d\pi_p t = 0\}$

Wenn es eine rechte Wirkung der Lie Gruppe G auf P gibt, dann kann man einen Lie-Algebra- Homomorphismus definieren:
$\lambda: g \to g$ **g ,** $(\lambda X)(p) := dp(X(e))$

Mit Hilfe von diesem Homomorphismus zeigen wir, dass V eine dimG - dimensionale Distribution auf P ist.

(i) Die Elemente von **g** sind vertikal:
Sei $\overline{X} = \lambda X$. Z.z. $\overline{X}_p \in V_p$
$d\pi(\overline{X}(p)) = d\pi(dp(X(e)) = 0$, da πop eine konstante Abbildung:$G \to \pi(p)$ ist.
(ii) Sei $t \in V_p$, dann $\exists \overline{X} \in$ **g ,** so dass $\overline{X}(p) = t$ (weil $dp_e: G_e \to T_p\pi^{-1}(\pi(p))$ ist ein Isomorphismus und $V_p = T_p\pi^{-1}(\pi(p))$).

Aus (i)&(ii) folgt, dass V eine Distribution mit Dimension dim(**g**) = dim(G) ist und $V \in C^\infty$.

Bemerkung:
Man hat drei verschiedene äquivalente Möglichkeiten die vertikalen Vektoren zu definieren:
$V_p = \ker d\pi_p = T_p\pi^{-1}(\pi(p)) = \{\overline{X}(p) \mid X \in g\}$

Definition Ein **Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel** (P,G,M) ist eine dim(M) - dimensionale Distribution H auf P so dass:

(1) $H \in C^\infty$

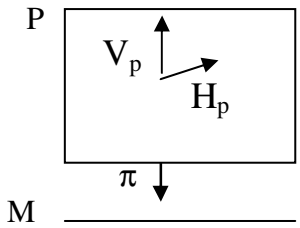
(2) $\forall p \in P$, $H_p + V_p = P_p$ (H_p ist der lineare Komplement von V_p)

(3) $\forall p \in P, \forall g \in G \; dR_g H_p = H_{pg}$

(!Hier sieht man auch die Rolle der Struktural-Gruppe G)

! Bem: $d\pi_p|_{Hp}: H_p \to M_{\pi(p)}$ ist injektiv $\Rightarrow H_p \cong M_{\pi(p)}$ (wegen der Dimension)

- $t \in P_p$ $t = Vt + Ht$, wobei $Vt \in V_p$ und $Ht \in H_p$
  Für jeden Vektorfeld X definiert man:
  $(VX)(p) := V(X(p))$
  $(HX)(p) := H(X(p))$



Bemerkungen:

- $X \in C^\infty \Leftrightarrow VX, HX \in C^\infty$
- $\forall X$ ein Vektorfeld auf M, $\exists!$ **X** ein Vektorfeld auf P „*der horizontale Lift von X*“
  so dass : (i) $\forall p \in P$, $\mathbf{X}(p) \in H_p$
  (ii) $d\pi \mathbf{X}(p) = X(\pi(p))$
  (also **X** ist definiert durch: $\mathbf{X}(p) = (d\pi|_{Hp})_p^{-1}(X(p))$
  Dieser Lift hat die nächsten Eigenschaften:
  (a) $X \in C^\infty \Rightarrow \mathbf{X} \in C^\infty$
  (b) $dR_g \mathbf{X} = \mathbf{X}$, $\forall g \in G$
  (es ist klar, weil $\mathbf{X(p)} \in H_p \; \forall p \in P$)
  (c) $\mathbf{X+Y} = \mathbf{X+Y}$
  ($d\pi(\mathbf{X+Y}) = d\pi(\mathbf{X}) + d\pi(\mathbf{Y}) = X(\pi(p))+Y(\pi(p)) = (X+Y)(\pi(p)) = d\pi(\mathbf{X+Y})(p)$ und $d\pi|H_p$ ist bijektiv)
  (d) $H\mathbf{[X,Y]} = \mathbf{[X,Y]}$
  (weil X und **X** sind π verknüpft es gilt:
  $d\pi(H\mathbf{[X,Y]})(p) = d\pi(\mathbf{[X,Y]})(p) = [X,Y](\pi(p)) = d\pi(\mathbf{[X,Y]}(p)$).

Die zweite Formulierung eines Zusammenhangs

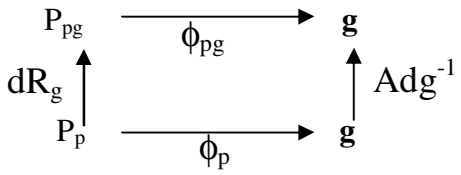
Definition **Die 1-Form von einem Zusammenhang** H ist die 1-Form ϕ mit Werten in die Lie-Algebra g, gegeben durch:

$\forall p \in P \;\; \forall t \in P_p \;\; \phi(t) = X \in \mathbf{g}$, so dass $\overline{\mathbf{X}}(p) = Vt$

- Eine p-Form φ auf P heißt vertikal (horizontal), falls gilt:
  $\varphi(X_1,...,X_p)=0$, falls mindestens ein X_j horizontal (vertikal) ist.
- Eine p-Form ω heißt äquivariant falls für alle $g \in G$: $\omega \circ dR_g = Adg^{-1} \circ \omega$

Für eine 1-Form ϕ haben wir:

ϕ ist äquivariant $\Leftrightarrow$ das nächste Diagramm kommutativ ist:



Bemerkung:
Die Definition einer vertikalen Form hängt von der Existenz eines Zusammenhangs ab, während eine horizontale Form unabhängig von einem Zusammenhang ist.

Lemma Die 1-Form des Zusammenhangs H hat die folgenden Eigenschaften:

(i) ϕ ist vertikal
(ii) Falls $X\in g$, $\overline{X}\in \mathbf{g}$, dann $\phi(\overline{X}(p)) = X$ für alle $p\in P$
(iii) ϕ ist äquivariant
(iv) $\phi\in C^\infty$

Beweis:
(i)&(ii) folgen direkt aus der Definition der 1-Form ϕ
(iii) Wir wissen, dass $dR_g(\overline{X}) = \mathbf{Adg^{-1}X}$
Sei $t\in P_p$, dann $\phi_{pg} o dR_g(t) = \phi_{pg} o dR_g(Vt) = \phi_{pg} o \mathbf{Adg^{-1} o \phi_p(t)} = Adg^{-1} o \phi_p(t)$
(iv) Sei $X\in C^\infty$ Vektorfeld auf $P \Rightarrow VX\in C^\infty \Rightarrow \exists f_i\in C^\infty$ so daß $VX = \Sigma f_i \overline{X_i}$
Dann $\phi(X) = \Sigma f_i X_i \Rightarrow \phi(X)\in C^\infty$

Theorem 1 Sei ϕ eine 1-Form auf P mit Werten in **g ,** die (ii)-(iv) erfüllt, dann $\exists!$ ein Zusammenhang H auf P, so dass ϕ seine 1-Form ist.
Daraus folgt daß es eine Bijektion (1:1 Korrespondenz) zwischen solchen 1- Formen auf P und Zusammenhänge auf P gibt.

Beweis:
Wir definieren $H_p = \{ t\in P_p \mid \phi_p(t)=0\}$
Für alle $t\in P_p$ wir definieren $Vt = \mathbf{\phi(t)}(p) \Rightarrow t\text{-}Vt\in H_p$
$((\Phi(t\text{-}Vt) = \Phi(t)\text{-}\Phi(Vt) = \Phi(t)\text{-}\Phi(\mathbf{\Phi(t)}(p)) = \Phi(t)\text{-}\Phi(t) = 0) \Rightarrow$ (ii) $H_p + V_p = P_p$
$\forall g\in G\ \phi(dR_g t) = Adg^{-1}\phi$, falls $t\in H_p \Rightarrow dR_g t\in H_{pg} \Rightarrow$ (iii)
$X\in C^\infty \Rightarrow VX = \mathbf{\phi(X)}\in C^\infty \Rightarrow HX = X\text{-}VX\in C^\infty$

Bemerkung: Seien ϕ und ψ zwei Zusammenhangs-1-Form auf P und f eine C^∞ Funktion auf M. Dann gilt:

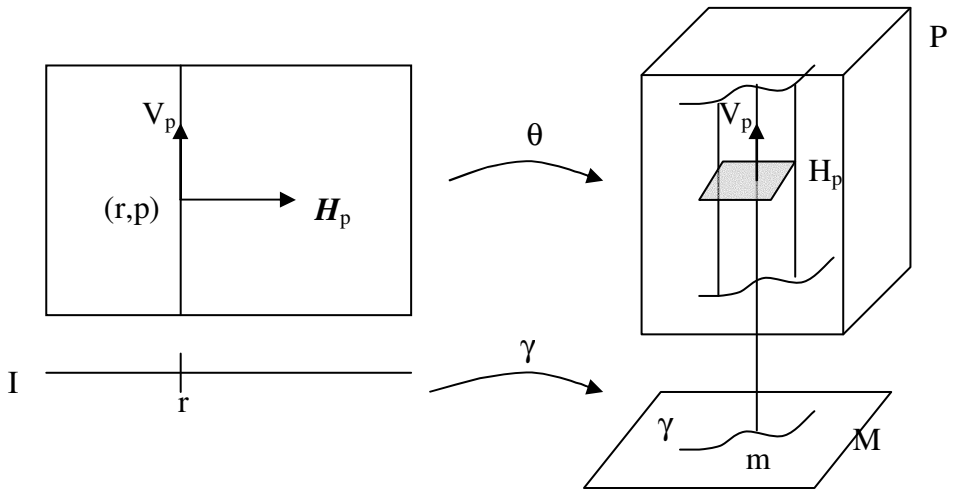
(a) $(f o \pi)\phi + (1- f o \pi)\psi$ ist ein neuer Zusammenhangs-1-Form auf P
(b) Für $t\in P_p$ seien die horizontalen und vertikalen Zerlegungen von t bzgl. des Zusammenhangs ϕ, bzw. ψ: $t=t1+t2$, bzw. $t=t1'+t2'$.
Dann ist die Zerlegung von t bzgl. $(f o \pi)\phi + (1- f o \pi)\psi$: $t=t1''+t2''$, wobei:
$t1'' = (f o \pi)(p)t1 + (1- f o \pi)(p)t1'$
$t2'' = (f o \pi)(p)t2 + (1- f o \pi)(p)t2'$

Folgerung: Die Zusammenhänge auf P bilden einen affinen Raum.(wir nehmen f=konstant)
Bemerkung: Es gibt ein Zusammenhang auf jedem Hauptfaserbündel.

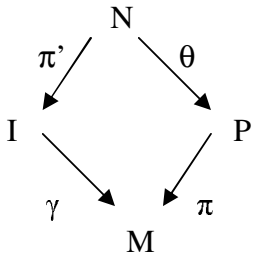
(C) Zusammenhänge und Paralleltransport

Definition Sei γ eine stückweise C^∞-Kurve in M. Ein horizontaler Lift von γ ist eine stückweise C^∞-Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ in P mit:
(i) $\boldsymbol{\gamma}$ ist horizontal
(ii) $\pi o \boldsymbol{\gamma} = \gamma$

Theorem 2 Sei γ eine stückweise C^∞-Kurve in M, $\gamma:[0,1] \to M$, und $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$.
Dann existiert eindeutig bestimmt ein horizontaler Lift $\boldsymbol{\gamma}$ von γ, so dass $\boldsymbol{\gamma}(0) = p$.



Beweis:
OBdA nehmen wir an, daß γ eine C^∞-Kurve in M, γ: [0,1] →M (weil wir die Stücke nur in eine bestimmte Weise verknüpfen können).
Wir verlängern γ:I→M, I = (-ε,1+ε).
Allgemein haben wir: sei Φ:N→M eine C^∞ Abbildung und (P,G,M) ein Prinzipalbündel, dann kann man ein von Φ und (P,G,M) induziertes Prinzipalbündel konstruieren:
$(\overline{P}, G, N)$, wobei $\overline{P} = \{(n,p) \in N \times P | \Phi(n) = \pi(p)\}$.
Dann ist $\overline{P}$ eine Untermannigfaltigkeit von N×P und $(\overline{P}, G, N)$ wird ein Prinzipalbündel mit der rechten Operation (n,p)g := (n,pg).
In unserem Fall $N = \{(r,q) \in I \times P | \gamma(r) = \pi(q)\}$ ist der Bündelraum von einem Prinzipalbündel (N,G,π',I).



Die Projektion auf P θ:N→P, $\theta(r,q) = q$ kann man benutzen um ein Zusammenhang auf N zu konstruieren: die Zusammenhangs-1-Form ist die zurückgezogene 1-Form : $\boldsymbol{\Phi} = \theta^* \Phi$.

Sei X der eindeutig bestimmter Lift von $^{d}/_{dt}$ auf N und **u** sei die Integralkurve von X mit Anfangspunkt (0,p). Der Bereich von **u** ist der ganze I.
Wir definieren $\boldsymbol{\gamma} = \theta o \mathbf{u}$. Es ist klar, dass $\boldsymbol{\gamma}$ ein Lift von γ ist und auch horizontal, da $\Phi(\boldsymbol{\gamma}_*) = \Phi(d\theta o \mathbf{u}_*) = \Phi(X) = 0$.
Der Lift ist auch eindeutig bestimmt mit einem Standardargument (Picard-Lindelöf Theorem für gewöhnliche Differentialgleichungen).

Korollar 1 Sei H ein Zusammenhang auf (P,G,M), γ eine Kurve in M wie in der Theorem 2 , dann wird definiert ein Diffeomorphismus T_γ: $\pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$, genannt die Paralleltransport von $\gamma(0)$ bis $\gamma(1)$ entlang γ, durch:
$T_\gamma(p) = \boldsymbol{\gamma}(1)$, wobei $\boldsymbol{\gamma}$ der Lift von γ mit $\boldsymbol{\gamma}(0)=p$ ist.
T_γ ist unabhängig von der Parametrisierung von γ und es gilt: $T_\gamma o R_g = R_g o T_\gamma$ für alle $g \in G$.
Wenn γ und σ zwei solche Kurve mit $\sigma(0)=\gamma(1)$ sind, dann folgt $T_{\gamma\sigma} = T_\sigma o T_\gamma$.

{ SHAPE * MERGEFORMAT }

Beweis :
Sei $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, $\boldsymbol{\gamma}$ der Lift von γ mit $\boldsymbol{\gamma}(0)=p$, und definiere $T_\gamma(p) = \boldsymbol{\gamma}(1)$.
$T_\gamma o R_g = R_g o T_\gamma$ ist klar, da $\boldsymbol{\gamma} = R_g o \boldsymbol{\gamma}$ ist auch ein horizontaler Lift von γ mit $\boldsymbol{\gamma}(0) = pg$ und wegen der Eindeutigkeit folgt, dass $T_\gamma o R_g (p) = T_\gamma(pg) = R_g o \boldsymbol{\gamma}(1) = R_g o T_\gamma(p)$.
Wir benutzen diese rechts-invariante Eigenschaft um zu prüfen, dass $T_\gamma \in C^\infty$ und dass T_γ ein unabhängig von der Parametrisierung Diffeomorphismus ist:
Sei p_o beliebig fixiert in $\pi^{-1}(\gamma(0))$, $p_1 = T_\gamma(p_o)$, dann $T_\gamma(p_o g) = T_\gamma(p_o)g$, so dass $T_\gamma = p_1 o p_o^{-1}$: $\pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow G \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$.

Bemerkung :
Der Begriff von Paralleltransport ist äquivalent zu einem Zusammenhang:
wenn eine Paralleltransport gegeben ist, und die Rechtsinvariation und einige Bedingungen für die Glattheit gelten, dann kann man den Zusammenhang wiederbekommen :
sei $t \in P_p$ und wähle eine entsprechende Kurve γ, so dass $\pi(p)=\gamma(0)$ und $\gamma_*(0)= d\pi\, t$. Dann definiere $Ht= T_\gamma(p)_*(0)$, wobei man $T_\gamma(p)$ al seine Kurve $s \rightarrow$die parallele Verschiebung von p von $\gamma(0)$ bis $\gamma(s)$ entlang γ.

Der nächste Satz liefert eine interessante Interpretation für die Zusammenhangs-1-Form.

Korollar 2 Sei γ und γ wie in Theorem 2, und sei τ ein beliebiger Lift (nicht unbedingt horizontal). Definiere α: I→G durch: $\alpha(r)$ ist das eindeutig bestimmte Element von G, so dass $\gamma(r)=\tau(r)\alpha(r)$.
Dann $dR_{(\alpha(r)}{}^{-1})\alpha_*(r) = -\Phi(\tau_*(r))$ (man identifiziert G_e mit g durch die links-Translation).

Beweis:
Sei I_r: G→P gegeben durch $I_r(g)=\tau(r)g$. Dann $I_r o\ L_g = \tau(r)g:G\to P$.
Wir haben $\gamma(r) = \tau(r)\alpha(r)$, $\tau(r)\in P$, $\alpha(r)\in G$ und die Wirkung $P\times G\to P$, $(p,g)\to pg$.
Weil $\gamma(r) = I_r(\alpha(r)) = R_{\alpha(r)}\tau(r)$, dann gilt :
$\gamma_*(r) = dI_r\alpha_*(r)+dR_{\alpha(r)}\tau_*(r)$ (1)
$dI_r\alpha_*(r) = dI_r dL_{\alpha(r)} dL_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r)) = d(\tau(r)\alpha(r))(dL_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r))) =$
$\lambda(dL_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r))(\tau(r)\alpha(r))$ (Definition von λX)
$\Phi(dI_r\alpha_*(r)) = dL_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r))$, wegen der Identifizierung zwischen G_e und g.
$\Phi(dR_{\alpha(r)}\tau_*(r)) = Ad\alpha(r)^{-1}\Phi(\tau_*(r))$
Weil γ horizontal ist, wenn wir Φ zu (1) anwenden folgt:
$dL_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r)) = -Ad\alpha(r)^{-1}\Phi(\tau_*(r)) = - dL_{\alpha(r)}{}^{-1} o\ dR_{\alpha(r)}(\Phi(\tau_*(r)))$,
so dass $dR_{\alpha(r)}{}^{-1}(\alpha_*(r)) = - \Phi(\tau_*(r))$.

Literatur :

R. Bishop, R. Crittenden: Geometry of manifolds, Academic Press 1964

M. Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. II, Berkeley, 1979

Nume fişier:	vortrag
Director:	D:\mihaela
Şablon:	C:\Documents and Settings\magda\Application Data\Microsoft\Şabloane\Normal.dot
Titlu:	Zusammenhänge
Subiect:	
Autor:	Computerraum
Cuvinte cheie:	
Comentarii:	
Data creării:	4/27/2003 1:49 PM
Număr de revizie:	48
Ultima salvare :	5/27/2003 12:01 AM
Ultima salvare făcută de:	mada
Timp total de editare:	277 Minute
Ultima imprimare pe:	5/27/2003 12:01 AM

Ca la ultima imprimare completă

Număr de pagini:	8
Număr de cuvinte:	1,868 (aprox.)
Număr de caractere:	10,650 (aprox.)