Faserbündel

Seminar Differentialgeometrie: Eichtheorie
FB Mathematik, Uni Hamburg im Sommersemester 2003

Vortrag von Andrea Röser

29. April 2003

1 Prinzipale Bündel

Definition. Ein *prinzipales ($\mathcal{C}^\infty$-)Faserbündel* (oder *Hauptfaserbündel*) ist eine Quadrupel (P, G, R, M), wobei P und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und G eine Lie-Gruppe ist, so dass Folgendes gilt:

(i) G operiert frei von rechts auf P durch die Abbildung $R : P \times G \to P$ und diese ist differenzierbar. Für $g \in G$ schreiben wir dann auch $R_g : P \to P$, $p \mapsto R(p, g) =: R_g(p)$ oder $g : P \to P$, $p \mapsto R_g(p) =: pg$.

(ii) M ist der Quotientenraum von P unter G, also $M = P/G$, so dass die Projektion $\pi : P \to M$ $\mathcal{C}^\infty$ ist. Dann operiert G für $m \in M$ G einfach transitiv auf $\pi^{-1}(m)$.

(iii) P ist lokal trivial, das heißt, für jedes $m \in M$ existieren eine Umgebung U von m und eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$, so dass F_U mit R_g für jedes $g \in G$ kommutiert, das heißt

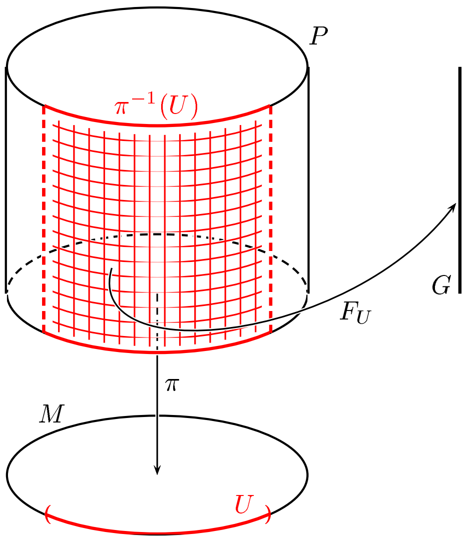
$$F_U(p)g = R_g(F_U(p)) = F_U(R_g(p)) = F_U(pg),$$

und die Abbildung

$$\pi^{-1}(U) \to U \times G, X \mapsto (\pi(X), F_U(X))$$

ein Diffeomorphismus ist.

Man nennt P den *Bündelraum*, M den *Basisraum* und G die *Strukturgruppe*. Für $m \in M$ heißt $\pi^{-1}(m)$ die *Faser* über m.



Bemerkung.

- Die Fasern sind diffeomorph zu G, zum Beispiel über die Abbildung

$$p : G \to \pi^{-1}(\pi(p)) \subset P, p(g) = R_g p = pg.$$

- Die Rechtsoperation von G auf P ist gegeben durch Rechtstranslation, das heißt wenn $p \mapsto (\pi(p), F_U(p))$, dann gilt

$$pg \mapsto (\pi(p), F_U(p)g)$$

wegen $F_U(pg) = F_U(p)g$.

Beispiel. **(a) Das triviale (Produkt-)Bündel.** Wenn G eine Lie-Gruppe ist und M eine Mannigfaltigkeit, dann ist $P = M \times G$, versehen mit der Rechtsoperation von G auf sich selbst in der zweiten Komponente, dh. $(m, g)h = (m, gh)$, der Bündelraum eines trivialen Bündels. Dabei ist ein Bündel isomorph zu einem trivialen Bündel genau dann, wenn eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $K : M \to P$ existiert, so dass $\pi \circ K$ die Identität auf M ist.

(b) Das Rahmenbündel. Sei M eine d-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit und $B(M)$ die Menge der $(d+1)$-Tupel $(m, e_1, \ldots, e_d)$, wobei $m \in M$ und $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von $T_m M$ ist. Die Abbildung $\pi : B(M) \to M$ sei gegeben durch $\pi(m, e_1, \ldots, e_d) := m$. Dann operiert $Gl(d, \mathbb{R})$ von rechts auf $B(M)$:

Sei $g \in Gl(d, \mathbb{R})$, dargestellt als Matrix $g = (g_{ij})$, und sei $(m, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$, dann definiere

$$R_g(m, e_1, \ldots, e_d) := (m, \textstyle\sum_{i=1}^d g_{i1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^d g_{id} e_i).$$

Wenn $m \in M$ ist und $(x_1, \ldots, x_d)$ ein Koordinatensystem in einer Umgebung U von m, dann definieren wir F_U für $m' \in U$ durch

$$F_U(m', f_1, \ldots, f_d) := (dx_j|_{m'}(f_i)) = (g_{ij}) \in Gl(d, \mathbb{R}).$$

So geben die Funktionen $y_i = x_i \circ \pi$ und $y_{ij} = x_{ij} \circ F_U$ ein Koordinatensystem auf $\pi^{-1}(U)$, wobei die x_{ij} die Standardkoordinaten auf $Gl(d, \mathbb{R})$ sind.

Mit der $\mathcal{C}^\infty$-Struktur auf $B(M)$ durch die lokale Repräsentation (π, F_U) wird $B(M)$ zum Bündelraum eines prinzipalen Bündels, dem sogenannten *Rahmenbündel* auf M.

Manchmal ist es praktisch, $B(M)$ als Menge der invertierbaren Lineartransformationen von $\mathbb{R}^d$ in das Tangentialbündel von M zu betrachten, das heißt, wir identifizieren $p = (m, e_1, \ldots, e_d)$ mit der Abbildung

$$p : \mathbb{R}^d \to T_m M, (r_1, \ldots, r_d) \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^d r_i e_i.$$

Dann ist es nur natürlich, $Gl(d, \mathbb{R})$ als die nichtsingulären Lineartransformationen von $\mathbb{R}^d$ zu betrachten, denn für $p = (m, e_1, \ldots, e_d)$ gilt

$$\begin{aligned}(pg)(r_1, \ldots, r_d) &= (m, \textstyle\sum_{j=1}^d g_{j1} e_j, \ldots, \sum_{j=1}^d g_{jd} e_j)(r_1, \ldots, r_d) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d r_i \sum_{j=1}^d g_{ji} e_j \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d r_i g_{ji} e_j \\ &= \textstyle\sum_j \Big(\sum_i r_i g_{ji} \Big) e_j \\ &= p(g(r_1, \ldots, r_d)).\end{aligned}$$

Das bedeutet, pg (als Abbildung) $= p$ (als Abbildung) $\circ g$.

Homogene Räume. Wenn G eine Lie-Gruppe ist, H eine abgeschlossene Untergruppe, dann gibt es ein Hauptfaserbündel mit Basisraum G/H (Linksnebenklassen), Bündelraum G und Strukturgruppe H, so dass

$$\pi : G \to G/H$$

die kanonische Projektion ist und die Rechtsoperation gegeben ist durch $(g, h) \mapsto gh$.

Beispiel.

- Es operiere $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ auf $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$ durch Skalarmultiplikation. Dann ist diese Operation differenzierbar, frei und einfach transitiv auf Orbits. Der Raum der Orbits ist $P\mathbb{R}^d$, der d-dimensionale projektive Raum, so dass

$$(\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}, \mathbb{R}^*, P\mathbb{R}^d)$$

ein Prinzipalbündel ist.

- Mit $\mathbb{R}^+$ an Stelle von $\mathbb{R}^*$ erhalten wir

$$(\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}, \mathbb{R}^*, S^d)$$

als Prinzipalbündel.

- Und verwenden wir schließlich $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C}^{d+1} - \{0\}$, so erhalten wir den komplex projektiven Raum $P\mathbb{C}^d$ als Basisraum.

Prinzipale Koordinatenbündel. Sei (P, G, M) ein Prinzipalbündel und sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M, so dass $\pi^{-1}(U_i)$ durch einen Produktraum dargestellt werden kann mittels der Funktion $F_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$. Für i, j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ definieren wir eine Abbildung $G_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ wie folgt: Für $m \in U_i \cap U_j$ sei $p \in \pi^{-1}(m)$, dann setze

$$G_{ij}(m) := F_j(p)(F_i(p))^{-1}.$$

Wir müssen zeigen, dass die Definition von $G_{ji}(m)$ unabhängig von der Wahl des p ist. Sei also auch $p' \in \pi^{-1}(m)$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $p' = pg$, da $\pi^{-1}(m)$ der Orbit von p ist. Wir haben also

$$\begin{aligned}F_j(p')F_i(p')^{-1} &= F_j(pg)F_i(pg)^{-1} \\ &= F_j(p)g(F_i(p)g)^{-1} \\ &= F_j(p)F_i(p)^{-1}\end{aligned}$$

wie gewünscht. Weiterhin erfüllen die Funktionen Folgendes:

$$G_{ki}(m) = G_{kj}(m)G_{ji}(m) \quad \text{für} \quad m \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Die Funktionen G_{ji} heißen *Übergangfunktionen* zur Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$.

Bemerkung. Die Übergangsfunktionen mit ihrer Überdeckung definieren ein prinzipales Koordinatenbündel im Sinne von Steenrod. Deshalb ist unsere Definition von Bündel eine Äquivalenzklasse von Koordinatenbündeln. Das ist eine andere Art zu sagen, dass zwei prinzipale Koordinatenbündel genau dann äquivalent sind, wenn ihre Rechtsoperationen übereinstimmen.

2 Assoziierte Bündel

Definition. Sei (P, G, M) ein Hauptfaserbündel und sei F eine Mannigfaltigkeit, auf der G von links operiert. Wir definieren das *zu (P, G, M) mit der Faser F assoziierte Faserbündel* (das auch von der Wirkung abhängt) wie folgt. Sei $B' = P \times F$ und betrachte die folgende Rechtsoperation von G auf B':

$$(p, f)g = (pg, g^{-1}f), \text{ wobei } p \in P, f \in F, g \in G.$$

Setze $B := B'/G$. Dann ist B der Bündelraum des assoziierten Faserbündels. Wir haben die folgende Struktur: Die Projektion $\pi' : B \to M$ ist definiert als

$$\pi'((p, f)G) = \pi(p).$$

Wenn $m \in M$ ist, so betrachte eine offene Umgebung U von m mit $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$. Dann erhalten wir $F'_U : \pi'^{-1}(U) \to F$ durch

$$F'_U((p, f)G) = F_U(p)f,$$

so dass $\pi'^{-1}(U)$ homöomorph ist zum Produkt $U \times F$. Sodann definieren wir B als die Mannigfaltigkeit, für die diese Homöomorphismen zu Diffeomorphismen werden.

Bemerkung. Jetzt ist $\pi' \in \mathcal{C}^\infty$ und auch die natürliche Projektion $B' \to B$ ist $\mathcal{C}^\infty$.

Assoziierte Koordinatenbündel. Wenn wir die Übergangsfunktion G'_{ji} für das assoziierte Bündel (B, F, G, M) analog zur Definition im Prinzipalbündel-Fall machen, erhalten wir für eine Überdeckung $\{U_i\}$ zugehörige Funktionen F'_i, so dass für $m \in U_i \cap U_j$, $(p, f)G \in \pi'^{-1}(m)$ gilt:

$$G'_{ji}(M) = F_j(p)(F_i(p))^{-1} = G_{ji}(m).$$

Also ist auch (B, F, G, M) eine Äquivalenzklasse von Koordinatenbündeln assoziiert zum prinzipalen Koordinatenbündel, definiert durch die Übergangsfunktionen G_{ji}, im Sinne von Steenrod.

Beispiel. **(a)** Sei (P, G, M) wie oben und es operiere G auf sich selbst durch Linkstranslation. Dann ist (P, G, M) das zu sich selbst assoziierte Bündel mit Faser G.

(b) **Tangentialbündel.** Betrachte das Rahmenbündel $B(M)$. (Beachte: Oft wird ein Bündel nur durch den Bündelraum angegeben!) Nun ist $Gl(d, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren Lineartransformationen von $\mathbb{R}^d$ und operiert daher auf $\mathbb{R}^d$ von links. Der Bündelraum des Tangentialbündels mit Faser $\mathbb{R}^d$ wird mit $T(M)$ oder TM bezeichnet und das Bündel heißt das *Tangentialbündel* von M.

TM kann wie folgt identifiziert werden durch den Raum aller Paare (m, t), wobei $m \in M$ und $t \in T_mM$ (Beachte: das „m“ im Paar ist eigentlich redundant, da es in den $(d + 1)$-Tupeln von $B(M)$ bereits drin steckt.)

$$((m, e_1, \ldots, e_d), (r_1, \ldots, r_d))Gl(d, \mathbb{R}) \mapsto (m, \sum_i r_i e_i),$$

oder, falls wir $B(M)$ als Raum der Abbildungen $p : \mathbb{R}^d \to T_m M$ betrachten, erhalten wir die Identifikation für $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$(p, x)Gl(d, \mathbb{R}) \mapsto (m, px),$$

wobei $m = \pi(p)$ ist. Mit dieser zweiten Formulierung sieht man leicht, dass die Identifikation wohldefiniert ist, denn für $(p', x')Gl(d, \mathbb{R}) = (p, x)Gl(d, \mathbb{R})$ existiert ein $g \in Gl(d, \mathbb{R})$, so dass $p' = pg$ und $x' = g^{-1}x$ und daher

$$p'x' = (pg)(g^{-1}x) = px,$$

denn als Abbildung ist pg die Komposition von p und g. Wir können also die Faser von TM über $m \in M$ als den Vektorraum der Tangenten in m betrachten, also $T_m M$ und TM selbst als Vereinigung aller Tangentialräume versehen mit der Struktur einer Mannigfaltigkeit.

Außerdem können durch diese Identifikation die Koordinaten von TM leicht bestimmt werden. Sei also U eine Koordinatenumgebung in M mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_d$. Wir definieren Koordinaten $y_1, \ldots, y_{2d}$ auf $\pi'^{-1}(U)$ wie folgt: Für $(m, t) \in \pi'^{-1}(U)$ setze

$$\left.\begin{array}{rcl} y_i(m,t) & := & x_i(m) \\ y_{d+i}(m,t) & := & dx_i(t) \end{array}\right\} \quad \text{für } i = 1, \ldots, d.$$

Ein $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfeld kann dann als Schnitt in π' betrachtet werden. Insbesondere liefert das triviale Vektorfeld (alle Werte gleich 0) eine Einbettung von M als Untermannigfaltigkeit in TM.

(c) Tensorbündel. Wenn wir im Beispiel (b) den $\mathbb{R}^d$ durch einen Vektorraum ersetzen, der durch multilineare Algebra entsteht, das heißt durch das Tensorprodukt von $\mathbb{R}^d$ und seinen Dualraum mit verschiedenen Multiplizitäten oder einen invarianten Unterraum davon, erhalten wir ein *Tensorbündel.*

Ein $\mathcal{C}^\infty$-Schnitt auf einer offenen Menge heißt ein *$\mathcal{C}^\infty$-Tensorfeld.* Die Gruppe eines Tensorbündels ist $Gl(d, \mathbb{R})$, sie operiert auf den Faktoren des Tensorprodukts unabhängig: auf $\mathbb{R}^d$ wie im Falle des Tangentialbündels und auf dem Dualraum durch Verkettung mit dem Inversen:

$$gv(x) = v(g^{-1}x) \text{ für } v \in (\mathbb{R}^d)^*, x \in \mathbb{R}^d \text{ und } g \in Gl(d, \mathbb{R}).$$

Oft betrachtet man das Bündel $B(M)$ mit seiner Strukturgruppe reduziert auf eine Untergruppe, denn in diesem Fall können mehr Unterräume der Tensorprodukte von $\mathbb{R}^d$ und seinem Dualraum invariant werden, was zu verschiedenen Tensorbündeln führt. (siehe Abschnitt über die Reduktion der Strukturgruppe).

(d) Vektorbündel. Das sind Bündel, in denen die Faser ein Vektorraum und die Strukturgruppe eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe dieses Vektorraums ist.

Vektorbündel sind ein Spezialfall. Sie werden oft definiert ohne die Strukturgruppe ausdrücklich zu erwähnen, indem der Bündelraum als Vereinigung von Vektorräumen der selben Dimension angegeben wird, wobei jeder von ihnen mit einem Element des Basisraumes assoziiert ist, und indem die Mannigfaltigkeitsstruktur durch glatte, linear unabhängige Schnitte über einer Überdeckung von Koordinatenumgebungen definiert wird. Für TM haben wir das ausführlich getan, indem wir die Koordinaten angegeben haben. In diesem Fall waren die Schnitte die Koordinaten-Vektorfelder D_{x_i}.

Ein anderes Beispiel dazu ist das *Quotientenraum-Bündel* einer Einbettung, welches im Fall von Riemannschen Metriken gewöhnlich als das *Normalbündel* bezeichnet wird. Dieses Vektorbündel lässt sich wie folgt definieren:

Sei $i : N \to M$ eine Einbettung der Untermannigfaltigkeit N in M. Die Faser über $n \in N$ ist der Quotientenraum $T_{i(n)}M/di(T_nN)$ und der Bündelraum ist die Vereinigung dieser Faser, so dass wir den Bündelraum als die Zusammenfassung aller Paare

$$(n, t + di(T_nN)) \text{ mit } t \in T_{i(n)M}$$

betrachten. Um Koordinaten zu erhalten, nehmen wir zunächst ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_d$ von M in $i(n)$, und nehmen an, dass

$$y_j = x_j \circ i \text{ für } j = 1, \ldots, d'$$

ein Koordinatensystem in n liefert und dass

$$X_j(n) = D_{x_j}(i(n)) + di(T_nN)$$

linear unabhängig sind für $j = d' + 1, \ldots, d$. Dann sind auch $X_j(n')$, $j = d' + 1, \ldots, d$ linear unabhängig für n' aus einer kleinen Umgebung U von n, so dass eine dazugehörige Dualbasis $V_j(n')$ existiert für $n' \in U$ und $j = d' + 1, \ldots, d$.

Nun definieren wir für $(n', X) \in \pi'^{-1}(U)$, wobei π' die Projektion vom Bündelraum in N ist, die Koordinaten $z_1, \ldots, z_d$ durch

$$\begin{array}{rclcrcll} z_j(n', X) & = & y_j(n') & \text{if} & j & = & 1, \ldots, d' & \text{und} \\ z_j(n', X) & = & V_j(n')(X) & \text{if} & j & = & d' + 1, \ldots, d. & \end{array}$$

Die Gruppe dieses Bündels kann als $Gl(d - d', \mathbb{R})$ betrachtet werden.

(e) Grassmann-Bündel. Der Menge der e-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^d$ kann eine Mannigfaltigkeitsstruktur zugeordnet werden, so dass die $Gl(d, \mathbb{R})$ in offensichtlicher Weise als differenzierbare Transformationsgruppe von links operiert. Die Bündel assoziiert zu $B(M)$ durch diese Operation sind die sogenannten *Grassmann-Bündel* von M. Der Bündelraum kann als Zusammenfassung der e-Ebenen in die Tangentialräume von M betrachtet werden. Eine $\mathcal{C}^\infty$-*e-dimensionale Distribution* ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Schnitt in diesem Bündel.

Die Wirkung eines Prinzipalbündels auf einer assoziierten Faser. Sei (P, G, M) ein Prinzipalbündel und sei B ein assoziiertes Bündel mit Faser F. Dann definiert die Quotienten-Projektion $P \times F \to B$ durch Einschränkung auf die erste Variable für jedes $p \in P$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $p : F \to B$ mit $p(f) = (p, f)G$. Sie erfüllt $p(gf) = (pg)f$ für jedes $g \in G$. Das haben wir bereits im Fall von $B(M)$ und TM gesehen.

Bemerkung. Ein assoziiertes Bündel ist trivial, wenn sein Prinzipalbündel trivial ist.

Das ist nicht äquivalent zur Existenz eines globalen Schnittes auf dem assoziierten Bündel, aber es impliziert die Existenz einer Familie von Schnitten mit paarweise disjunkten Definitionsbereichen, die das assoziierte Bündel ausfüllen.

3 Reduktion der Strukturgruppe

Definition. Sei (P, G, M) ein Prinzipalbündel. Wir nehmen an, dass G separabel[1] ist. Sei H eine Untergruppe von G. Dann ist, im Sinne von Steenrod, die Strukturgruppe G genau dann *reduzierbar auf die Untergruppe H*, wenn ein Koordinatenbündel in der Äquivalenzklasse von (P, G, M)

[1] Es existiert ein abzählbare Menge, die dicht liegt in $G \Leftrightarrow G$ hat abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.

existiert, deren Übergangsfunktionen ihre Werte in H annehmen, das heißt genau dann, wenn eine Überdeckung $\{U_i\}$ existiert, für deren G_{ji} gilt:

$$G_{ji}(U_i \cap U_j) \subset H.$$

Mit Hilfe der Rechtswirkung lässt sich das wie folgt formulieren:

Definition. Seien (P, G, M) und (P', G', M') Prinzipalbündel. Eine *Bündelabbildung* $f : (P, G, M) \to (P', G', M')$ ist eine Menge von $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen (f_P, f_G, f_M) zwischen den offensichtlichen Paaren, so dass f_G ein Homöomorphismus ist und die folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} f_M \circ \pi &= \pi' \circ f_P \\ f_P \circ R_g &= R_{f_G(g)} \circ f_P \quad \text{für alle } g \in G. \end{aligned}$$

Nun formulieren wir die zweite Definition als Satz.

Satz. *Wenn (P, G, M) ein Prinzipalbündel ist und H eine Untergruppe von G, dann ist G genau dann reduzierbar auf H, wenn ein Prinzipalbündel (P', H, M) existiert, das eine Bündelabbildung*

$$f : (P', H, M) \to (P, G, M)$$

zulässt, so dass

- *f_M die Identität auf M,*
- *f_P injektiv und*
- *f_G die Inklusionsabbildung $H \subset G$ ist.*