Liegruppen und Liealgebren
Eine Kleine Einführung

Seminar Differentialgeometrie: Eichtheorie
FB Mathematik, Uni Hamburg im Sommersemester 2003

Vortrag von Elisabeth Wienberg

15.April 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorgehen

- Gundlegende Definitionen und Sätze über Liegruppen und Liealgebren
- Beweise höchstens als Skizze
- Beispiele

1 Liegruppen

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1. Eine Liegruppe G ist eine Menge mit der algebraischen Struktur einer Gruppe, einer topologischen Struktur und der differenzierbaren Struktur einer Mannigfaltigkeit, so dass die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind, d.h.

$$\begin{array}{lllll} \text{Verknüpfung} & \mu : G\times G \to G, & \mu(g,h) := gh & \text{und} \\ \text{Inversenbildung} & J : \quad G \to G, & J(g) := g^{-1} \end{array}$$

sind glatt.

Bemerkung. Es genügt zu prüfen, ob $G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh^{-1}$ eine glatte Abbildung ist.

Notation 1.2. Liegruppen werden meistens multiplikativ geschrieben mit neutralem Element e. Häufig betrachtet man die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} \text{Linksmultiplikation} & L_g : G \to G, & h \mapsto gh & \text{und} \\ \text{Rechtsmultiplikation} & R_h : G \to G, & g \mapsto gh. \end{array}$$

Bemerkung. Für alle g, $h \in G$ sind L_g und R_h Diffeomorphismen ($L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$), die miteinander kommutieren (G ist assozativ). Außerdem gilt

$$\forall X, Y \in \Gamma(TG): \ d\mu|_{(g,h)}(X|_g, Y|_h) = dR_h(X|_g) + dL_g(Y|_h).$$

Beachte folgende Definition einer injektiven, immersierten Untermannigfaltigkeit, die allgemeiner als die in der Differentialgeometrie eingeführte Definition einer Untermannigfaltigkeit ist:

Definition 1.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Mannigfaltigkeit N heißt injektive immersierte Untermannigfaltigkeit von M, wenn es eine injektive, glatte Immersion $\iota : N \to M$ gibt, d.h. $d\iota|_p$ ist injektiv für alle $p \in M$.

Beispiel 1.4. Man beachte, dass für eine feste irrationale Zahl $r \in \mathbb{R}$

$$\iota\mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/Z^2, \quad t \mapsto [(t, t\cdot r)]$$

eine injektive Immersion ist, also $(\mathbb{R}, \iota)$ eine injektive, immersierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$ ist, wobei $\mathrm{im}(\iota)$ dicht liegt in $\mathbb{T}^2$, also keine Untermannigfaltigkeit im herkömmlichen Sinne ist.

Definition 1.5. Eine injektive, immersierte Untermannigfaltigkeit $\iota : H \to G$ einer Liegruppe G heißt eine Lieuntergruppe von G, wenn H eine Liegruppe und ι ein Gruppenhomomorphismus ist.

Definition 1.6. Ein Liegruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist ein *glatter* Gruppenhomomorphismus der Liegruppen G und H.

1.2 Grundlegende Eigenschaften

(1.2.1) Ist $H \subset G$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota = \mathrm{id}_G|_H$ die Inklusion, so ist (H, ι) eine Lieuntergruppe von G genau dann, wenn H eine Liegruppe und eine Untergruppe von G im algebraischen Sinne ist. Diese Bedingung erfüllen gerade die (im top. Sinne) *abgeschlossenen* (abstrakten) Untergruppen von G.

(1.2.2) Das Produkt von Liegruppen mit komponentenweiser Multiplikation ist eine Liegruppe.

(1.2.3) Ist $p : \widetilde{G} \to G$ eine Überlagerung, so kann man die differenzierbare Struktur und die Gruppenstruktur von G in eindeutiger Weise nach $\widetilde{G}$ liften, so dass p ein glatter, nicht singulärer Gruppenhomomorphismus wird.

($\hookrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit der universellen Überlagerungs-Liegruppe)

(1.2.4) Der Kern eines Liegruppenhomomorphismus (insbes. ein Normalteiler) ist eine Lieuntergruppe, da abgeschlossen als Urbild einer einelementigen Menge eines Hausdorffraumes.

(1.2.5) Die Zusammenhangskomponente des Einselementes e wird erzeugt von jeder zusammenhängenden Umgebung von e.

(1.2.6) Die Zusammenhangskomponenten einer Liegruppe sind diffeomorph.

1.3 Beispiele für Liegruppen

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(1.3.1) $(\mathbb{K}^n, +)$, additive Gruppe $(V, +)$ eines Vektorraumes V

(1.3.2) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

(1.3.3) Allgemeine Lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit Matrix-Mult. und ihre abgeschlossenen Untergruppen (die Linearen Gruppen), wie z.B.
$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$

(1.3.4) $\mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, wobei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sei.

(1.3.5) $\mathrm{Spin}(n)$ als universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ $(n \geq 3)$.

(1.3.6) $\mathrm{GL}(n\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$ mit der Verknüpfung $(A, x)(B, y) := (AB, Ay + x)$ (semidirektes Produkt) ist eine Liegruppe. Schreibe dafür $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^n$. Diese kann identifiziert werden mit der Gruppe der affinen Transformationen des $\mathbb{K}^n$ durch $(A, x) \leftrightarrow (\xi \mapsto A\xi + x)$ mit der Komposition von Trafos als Verknüpfung.

(1.3.7) $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1 \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$

(1.3.8) $\mathbb{S}^3 \simeq \big(\{q \in \mathbb{H} \,|\, \|q\| = 1\}, \cdot_{\mathbb{H}}\big)$

(1.3.9) $\mathbb{T}^k \simeq \underbrace{\mathbb{S} \times \cdots \times \mathbb{S}}_{k-\mathrm{mal}}$ mit komponentenweiser Multiplikation.

(1.3.10) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$ (Jede abelsche Liegruppe ist isomoph zu einer Liegruppe dieser Form.)

(1.3.11) Liegruppen treten häufig als Isometriegruppen von semi-riemannschen Mannigfaltigkeiten auf.

2 Liealgebren

2.1 Grundlegende Definitionen

Definition 2.1. Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 2$.
Eine Liealgebra ist ein K-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer Lieklammer genannten bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, so dass für alle X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$ gilt

- $[X,Y] = -[Y,X]$ (Antikommutativität; äquivalent zu $\forall X \in \mathfrak{g} : \ [X,X] = 0$)
- $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Als Dimension der Liealgebra bezeichnen wir die Dimension des unterliegenden Vektorraumes.

Definition 2.2. Eine Lieunteralgebra $\mathfrak{h}$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist eine Untervektorraum von $\mathfrak{g}$ mit $\forall X, Y \in \mathfrak{h} : \ [X,Y] \in \mathfrak{h}$.

Definition 2.3. Ein Liealgebrahomomorphismus $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ist eine die Lieklammern erhaltende lineare Abbildung.

Definition 2.4. Ein Ideal $\mathfrak{i}$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, wobei $[X,Y] \in \mathfrak{i}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und alle $Y \in \mathfrak{i}$.
(Wegen der Antikommutativität der Lieklammer sind Links- (resp. Rechts-) Ideale automatisch beidseitige Ideale.)

Notation 2.5. Bezeichne Liegruppen- und Liealgebrenhomomorphismen (-endomorphismen, -monomorphismen, -isomorphismen, -automorphismen) ohne den Zusatz ' Lie-', sofern nicht anders bemerkt.

Bemerkung. Der Kern eines Homomorphismus ist ein Ideal und das Bild eines Homomorphismus ist eine Unteralgebra.

Allgemeine Beispiele für Liealgebren

(2.1.1) Ist $(A, +, 0, \circ)$ eine assoziative K-Algebra, so wird auf dem K-Vektorraum $(A, +, 0)$ durch $[X,Y] := XY - YX$ für X, $Y \in A$ eine Lieabgebra-Struktur erklärt, die wir mit A^- bezeichnen.

(2.1.2) Wie (1) mit $(A, \circ) = (\mathrm{Mat}(n, K), \cdot)$.
Die Liealgebra $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})^-$ bezeichnen wir in Zukunft mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

(2.1.3) Wie (1) mit $(A, \circ) = (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V), \circ)$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Die Liealgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(n, \mathbb{K})^-$ bezeichnen wir in Zukunft mit $\mathfrak{gl}(V)$.

(2.1.4) Sei A eine K-Algebra. Die Derivationen von A $\mathcal{D}er_K(A) = \{D \in \mathrm{End}_K(A) \,|\, \forall a, b \in A : \ D(ab) = D(a)b + aD(b)\} \subset \mathrm{End}_K(A)$ bilden eine Liealgebra.

(2.1.5) Sei V ein Vektorraum. Die triviale Lieklammer $[X,Y] = 0$ für alle X, $Y \in V$ definiert die abelsche Liealgebra über V.

(2.1.6) Direkte Summe von Liealgebren L_1, L_2 mit Lieklammer $[(X,X'),(Y,Y')] := ([X,Y],[X',Y'])$ für X, $Y \in L_1$ und X', $Y' \in L_2$.

(2.1.7) Vollständige, glatte Vektorfelder $\Gamma^\infty(TM)$ einer Mannigfaltigkeit M mit der üblichen Lieklammer aus der Differentialgeometrie ($\dim(\Gamma^\infty(TM)) = \infty$).

2.2 Die Liealgebra einer Liegruppe

Definition 2.6. Sei G eine Liegruppe. Ein linksinvariantes Vektorfeld auf G ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ mit $dL_g(X) = X \circ L_g$, d.h. $dL_g|_h(X|_h) = X|_{gh}$ für alle g, $h \in G$.

Bemerkung. Analog kann man rechtsinvariante Vektorfelder auf G definieren durch die Eigenschaft $dR_g|_h(X|_h) = X|_g h$ und mit diesen die Konstruktion der Liealgebra von G durchführen, was zu isomorphen Strukturen führt. Das Differential der Inversenabbildung dJ überführt linksinvariante Vektorfelder in rechtsinvariante und stiftet die Beziehung der verschiedenen Konstruktionen.

Konstruktion 2.7.

- Linksinvariante Vektorfelder sind eindeutig bestimmt auf ganz G durch $X|_e$, insbes. global definiert, denn für alle $g \in G$ gilt: $X|_g = X|_{ge} = dL_g|_e(X|_e)$.

  Da L_g Diffeomorphismen sind, sind linksinvariante Vektorfelder glatt.
- Die linksinvarianten VF auf G bilden eine Liealgebra, die Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G.
- T_eG, mit der üblichen Lieklammer von Derivationen, ist eine Liealgebra.
- Mittels $\mathfrak{g} \ni X \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X|_e \in T_eG$ identifiziere den Tangentialraum ans Einselement e von G mit der Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G.

Notation 2.8. Die zu einer Liegruppe gehörende Liealgebra bezeichnen wir mit denselben Buchstaben in kleinen Frakturbuchstaben, z.B. bezeichnet $\mathfrak{spin}(n)$ die Liealgebra zur Liegruppe $\mathrm{Spin}(n)$. Schreibe auch gelegentlich $\mathrm{Lie}(G)$ für $\mathfrak{g}$.

2.3 Grundlegende Eigenschaften

(2.3.1) Die Liealgebra eines Produktes von Liegruppen ist die direkte Summe der zugehörigen Liealgebren.

(2.3.2) Die Dimension der Liegruppe als Mannigfaltigkeit stimmt mit der Dimension der zugehörigen Liealgebra überein: Identifikation mit Tangentialraum an e.

($\hookrightarrow$ Beispiele: Berechnung der Dimensionen der linearen Gruppen)

(2.3.3) *Lokal* isomorphe Liegruppen haben *isomorphe* Liealgebren.

(Zwei Liegruppen (G, e_G), (H, e_H) heißen lokal isomorph, wenn es Umgebung U von e_G in G und V von e_H in H und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ gibt, so dass $\forall g, h \in U$ mit $gh \in U$: $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$. Dann ist $d\varphi|_{e_G} : T_{e_G}G \to T_{e_H}H$ ist Isomorphismus.)

Anwendungen von (2.3.3)

- Überlagerung $\widetilde{G}$ von G hat zur Liealgebra von G isomorphe Liealgebra. Wichtiges Beispiel: $\mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.
- Der n-dim. Torus $\mathbb{T}^n$, lokal Lie-isomorph zu $\mathbb{R}^n$, hat Liealgebra $\mathbb{R}^n$.

Allgemeine Lineare Gruppe

Wir betrachten die Allgemeine Lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, die Gruppe der reellen *invertierbaren* $n \times n$-Matrizen.
Die Liealgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *aller* $n \times n$-Matrizen mit dem Kommutator als Lieklammer (siehe (2.1.2)) kann mit der Liealgebra von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ identifiziert werden.

Identifikation von $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V))$ mit $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ geht dann über Identifikation von V mit $\mathbb{K}^n$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

3 Korrespondenz von Liegruppen und Liealgebren

3.1 Homomorphismen

Liegruppenhomomorphismen induzieren Homomorphismen der zugehörigen Liealgebren. Genauer gilt der

Satz 3.1. *Sei $\varphi : G \to H$ eine Liegruppenhomomorphismus. Dann induziert*

$$d\varphi|_{e_G} : T_{e_G}G \to T_{e_H}H \quad \textit{eine Abbildung} \quad d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h},$$

die ein Liealgebrenhomomorphismus ist. Für $X \in \mathfrak{g}$ sei dabei $d\varphi(X)$ dasjenige eindeutig bestimmte linksinvariante Vektorfeld auf H, für das $d\varphi(X)|_{e_H} := d\varphi(X|_{e_G})$. Die Zuordnung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(G,H) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}), \quad \varphi \mapsto d\varphi$$

ist injektiv. [Warner,3.16]

Oder anders ausgedrückt:

Homomorphismen von Liegruppen werden bestimmt
durch ihr Differential im Einselement.

Die *Existenz* eines Liegruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $d\varphi = \Phi$, zu vorgegebenem Homomorphismus $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der zugehörigen Liealgebren ist sichergestellt, wenn G einfach zusammenhängend ist (siehe [Warner, 3.27]). Genauer gilt der

Satz 3.2. *Seien G und H Liegruppen, G einfach zusammenhängend, und $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{h}$ ihre Liealgebren. Dann ist die Zuordnung*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(G,H) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}), \qquad \varphi \mapsto d\varphi$$

ein 1:1-Korrespondenz.

Gemeint ist, dass diese Zuordnung eine Bijektion ist, die Teil eines kovarianten Funktors der entsprechenden Kategorien ist.

3.2 Lie-Unterstrukturen

Satz 3.3. *Sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und sei $\widetilde{\mathfrak{h}}$ eine Lieunteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte* zusammenhängende *Lieuntergruppe $\iota : H \hookrightarrow G$ mit Liealgebra $\mathfrak{h}$, so dass $d\iota(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$*

Lassen wir die Bedingung fallen, dass H zusammenhängend sei, so können wir nicht erwarten, dass H durch $\widetilde{\mathfrak{h}}$ eindeutig bestimmt wird, da $\mathrm{Lie}(H)$ nur von der Zusammenhangskomponente der Eins in H abhängt.

Satz 3.4. *Sei G eine Liegruppe und $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Lieuntergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{h}$. Dann ist $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ ein Liealgebrenisomorphismus.*

Korollar 3.5. *Es besteht eine 1:1-Korrenspondenz zwischen den zusammenhängenden Lieuntergruppen einer Liegruppe und den Unterliealgebren ihrer Liealgebra.*

Wie diese Korrespondenz besser beschrieben werden kann wollen wir im nächsten Abschnitt anschauen.

4 Die Exponentialabbildung

4.1 1-Parameter-Untergruppen

Definition 4.1. Einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to G$ der Liegruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(G, \cdot)$ nennt man eine 1-Parameter-Untergruppe von G.

Das Bild eines Homomorphismus ist eine Untergruppe, die hier von einem reellen Parameter abhängt – daher der Name.

Konstruktion 4.2. Jedes $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$ spannt eine abelsche 1-dim. Lieunteralgebra von $\mathfrak{g}$ auf. Nach Kor. 3.5 existiert also eine eindeutig bestimmte, zusammenhängende, 1-dim. Lieuntergruppe Γ von G mit Liealgebra $\operatorname{span}(\{X\}) = \{tX | t \in \mathbb{R}\}$.
Nun definiert

$$\dot{\gamma}_X : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}, \quad t \mapsto tX$$

einen Homomorphismus von Liealgebren, wobei $\mathbb{R}$ mit seiner (abelschen) Liealgebra mittels $(t \longleftrightarrow t\frac{d}{dr})$ identifiziert sei. (Lie($\mathbb{R}$) sind die konstanten VF auf $\mathbb{R}$.)
Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach Satz 3.2 ein Liegruppenhomomorphismus

$$\gamma_X : \mathbb{R} \to G \qquad \text{mit} \qquad d\gamma_X(t\frac{d}{dr}) = \dot{\gamma}_X(t) = tX.$$

γ_X ist nichts anderes als die Integralkurve zu X mit $\gamma_X(0) = e$. Beachte, dass linksinvariante Vektorfelder vollständig sind.
Wir nennen $\Gamma = \gamma_X(\mathbb{R})$ die 1-Parameter-Untergruppe zu X.

4.2 Exponentialabbildung

Die Exponentialabbildung zu definieren ist (jetzt) ganz leicht:

Definition 4.3. Sei G eine Liegruppe und γ_X wie oben. Wir definieren die Exponentialabbildung von G durch

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

Bemerkungen.

- Da $\gamma_X = (t \mapsto \exp(tX))$, schreibe auch $\exp_X$ für die Integralkurve zu $X \in \mathfrak{g}$ in e.
- Da Homomorphismen von Liegruppen durch ihr Differential im Einselement bestimmt sind, kann man auch sagen, dass $t \mapsto \exp_X(t)$ *die* 1-Parameter-Untergruppe mit $d\exp_X(0) = X|_e$ ist.

Eigenschaften der Exponentialabbildung

Satz 4.4. *Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Liegruppen. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Satz 4.5. *Die Exponentialabbildung ist glatt und $d\exp|_0 : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ ist die Identität, d.h. in einer Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ ist $\exp$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von $e \in G$.*

Bemerkung. Die auf Matrizengruppen gegebene, ebenfalls Exponentialabbildung genannte, Abbildung

$$e : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}), \quad A \mapsto e^A = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} A^k$$

stimmt nach geeigneten Identifikationen mit der oben konstruieren Abbildung exp überein.

Es gelten folgende Rechenregeln [Warner 3.35]:

(4.2.1) $\forall B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : \quad Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$

(4.2.2) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

(4.2.3) $AB = BA \quad \Rightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B$

4.3 Beispiele: Liealgebren einiger linearer Gruppen

- $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$
  $\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$, die antisymmetrischen Matrizen.
- $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$
  $\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$
- $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1} \text{ und } \det A = 1\}$ ist die Zusammenhangskomponente der Eins E_n in $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Also
  $\mathfrak{o} = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A^t = -A \text{ und } \operatorname{tr} A = 0\}$.
  Verschwindende Spur ist keine zusätzliche Bedingung für antisymmetrische Matrizen! Man sieht: Die verschiedenen Wege führen zum selben Ziel.
- $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = A^{-1}\}$
  $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A\}$, die antihermiteschen Matrizen.
- $\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = A^{-1} \text{ und } \det A = 1\}$
  $\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A \text{ und } \operatorname{tr} A = 0\}$, die antihermiteschen Matrizen mit verschwindender Spur. Beachte: $\mathrm{U}(n)$ ist zsh. und tatsächlich ist auch $\operatorname{tr} A = 0$ eine zusätzliche Bedingung.

(Literaturangaben werden noch nachgereicht. Man vergleiche bei Bedarf die Literaturangaben zum Seminar Eichtheorie. Im Bishop/Crittenden findet sich allerdings keine Ausführliche Beschreibeung der Beispiele.)