# Seminar über Variationsrechnung

## Sommersemester 2003


## Prof. Dr. Reiner Lauterbach, Dr. Bernd Ammann


Acroread users: Press here to switch to full screen

# I. Die Direkte Methode

**Vortrag 1.** *Die Variationsmethode.*
Erklären und beweisen Sie Theorem 1.1 und Theorem 1.2 aus [1]. Zeigen Sie, wie man diese Theoreme in Anwendungen nutzt: entartete elliptische Gleichungen (Theorem 1.3), minimal teilende Hyperflächen (Theorem 1.4) und minimale Hyperflächen in Mannigfaltigkeiten (Theorem 1.5). Literatur: [1] Seiten 1–8. Bernd Ammann

**Vortrag 2.** *Zwangsbedingungen.*
Mit Hilfe von "künstlich" eingeführten Zwangsbedingungen können wir weiter partielle Differentialgleichungen lösen. Zeigen Sie dazu Theorem 2.1. Jedoch kann Theorem 2.1 **nicht** für $p = 2n/(n-2)$ angewendet werden. Um auch eine Aussage für $p = 2n/(n-2)$ zu bekommen, führe man schwache Unter- und Ober-Lösungen ein (2.3), zeige Theorem 2.4. Stellen Sie dar, wie man diese Aussagen in 2.5 anwendet. Literatur: [1] Seiten 13–18. Florian Hanisch

**Ergänzungs-Vortrag 1.** *Das klassische Plateau-Problem.*
Das Plateau-Problem besagt: "Gegeben sei ein Stück Draht, mathematisch modelliert durch eine Einbettung $\gamma$ von $S^1$ in $\mathbb{R}^3$. Man finde eine Seifenfläche, deren Rand $\gamma$ ist." Dieses mathematische Problem kann mit den bereits vorhandenen Methoden gelöst werden. [1] Seiten 19–24 Semyon Chaichenets

**Vortrag 3.** *Das "Concentration-Compactness"-Prinzip, Teil I.*
In vielen praktischen Problemen können die bereits eingeführten Methoden nicht angewendet werden, da eine nicht-kompakte Symmetrie-Gruppe operiert, z.B. translations invarianz des Problems. Eine Abhilfe ist das Concentration-Compactness-Prinzip. Erklären Sie zunächst Beispiel 4.1 und den Satz 4.2. Präsentieren und beweisen Sie danach das Concentration-compactness Lemma I und zeigen Sie, wie man 4.3. zur Lösung des Problems in Satz 4.2 benutzen kann. [1] I.4 Seiten 36–41. Jan Christoph Kinne

**Ergänzungs-Vortrag 2.** *Das "Concentration-Compactness"-Prinzip, Teil II.*
Ziel dieses Vortrags ist es, das Concentration-Compactness-Prinzip zu erweitern. Damit lösen wir die Existenz von Funktionen für die die optimale Konstante in den Sobolev-Ungleichungen angenommen wird. [1] I.4 Seiten 42–49. Schildern Sie zunächst das Problem (I.4.4 und I.4.5), diskutieren Sie den Fall $k = 1$ (I.4.6), Zeigen Sie dann Concentration-Compactness-Lemma II (I.4.8) und zeigen Sie, wie es benutzt werden kann, um die Existenz der oben beschriebenen Funktionen herzuleiten (Theorem I.4.9 und Korollar I.4.10) Jan Henrik Sylvester

**Ergänzungs-Vortrag 3.** *Dualität und Anwendung auf periodische nicht-linerae Schwingungsgleichungen.*
Konvexität, Legendre-Fenchel-Transform, Periodische Lösungen der Hamilton-Gleichungen in $\mathbb{R}^2$, Periodische Lösungen einer nichtlinearen Wellengleichung. [1] I.6.1–6.7 Wei-Yu Chen

**Vortrag 4.** *Ekeland's Variations-Prinzip.*
Das Ekelandsche Variations-Prinzip beruht darauf, dass wir zunächst einen kleinen regularisierenden Term zu dem Funktional addieren, danach einen Minimierer für dieses gestörte Funktional suchen. Dieser Minimierer minimiert dann bis auf einen kleinen Fehler. Erklären Sie insbesondere die Rolle der Palais-Smale-Folgen. [1] 51–54 oben, I.5.1 bis I.5.3 Reiner Lauterbach

# II. Minimax-Methoden

**Vortrag 5.** *Endlich-dimensionale Minimax-Methoden und Palais-Smale-Bedingungen.*
[1] II.1 und II.2.1-II.2.3, Seiten 74–80. Jochen Merker

**Vortrag 6.** *Minimax-Prinzip.*
Ein allgemeines Deformations-Lemma und Palais' Minimax-Prinzip. Anwendung auf geschlossene Geodätische. [1] II.3 und II.4, Seiten 81–93. Nicolas Ginoux

**Vortrag 7.** *Index-Theory.*
[1] II.5. (Die genaue Stoffauswahl bitte nochmals absprechen.)

**Vortrag 8.** *Das Mountain-Pass-Lemma.*
Das Mountain-Pass-Lemma ist ein einfaches und schönes, aber in Anwendungen sehr mächtiges Hilfsmittel, um die Existenz von sattelpunktartigen kritischen Punkten zu zeigen. der Beweis benutzt das Deformationslemma (Theorem II.3.4). Im wesentlichen [1] II.6 Voicu

# III. Nicht-lineare Partielle Differentialgleichungen mit kritischen Exponenten

**Vortrag 9.** *Pohožaevs Nicht-Existenz-Resultat und das Brezis-Nirenberg-Resultat.*
[1] III.1.1–III.1.4.. Man zeige zunächst, dass auf sternförmingen Gebieten keine Lösungen von

$$-\Delta u = u|u|^{4/(n-2)}$$

existieren. Zeigen Sie danach Theorem 2.1 mit der ersten-Methode (den von Brezis und Nirenberg entwickelten Zugang mit Hilfe der Funktionale $S_\lambda$, d.h. Lemma 2.2 und den Beweis von 2.1, der auf Seite 178 beginnt.)

**Vortrag 10.** *Topologische Lösungsmethoden.*
Die Topologie des Definitionsbereichs impliziert die Existenz von Lösungen. Ziel des Vortrags ist der Beweis von [1] Theorem III.3.4. Der Inhalt des Vortrags ist

(abgesehen von einigen Seiten-Bemerkungen, die weggelassen werden können) identisch mit [1] III.3. Theorem III.3.5 sollte formuliert werden, auf einen Beweis sollte man aber verzichten. Florian Hanisch

**Ergänzungs-Vortrag 4.** *Das Dirichlet-Problem für die Gleichung konstanter mittlerer Krümmung.*
[1] III.5 Dieses Problem ist eine Variation des Plateau-Problems. Allerdings suchen wir nun keine eingespannte Fläche minimalen Flächeninhalts (und somit mit mittlerer Krümmung $H = 0$), sondern eine Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung $H = const$. Dies ist eine Minimierung unter der Neben-Bedingung, dass das "Volumen unter der Fläche" gegeben ist. (Die genaue Stoffauswahl bitte nochmals absprechen.)

**Ergänzungs-Vortrag 5.** Der Beweis von Theorem III.3.5 und Erweiterungen. Literatur: [2], [3] und andere

**Ergänzungs-Vortrag 6.** *Compactness-concentration im Grenzfall der Palais-Smale-Bedingung.*
[5],[4] (muss noch genauer bestimmt werden).

**Ergänzungs-Vortrag 7.** *Das Yamabe-Problem und das equivariante Yamabe-Problem.*
Literatur: (wird noch bekanntgegeben)

Homepage:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ana-seminar`

# Literatur


[1] Michael Struwe, Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer Verlag


# Ergänzende Literatur für Ergänzungsvorträge


[2] Bahri, Coron. On a Nonlinear Elliptic equation involving the critical Sobolev Exponent: the effect of the Topology of the Domain, Comm. Pure. Appl. Math. 41, 253–294 (1988)

[3] H. Brezis. Elliptic equations with limiting Sobolev Exponents — The Impact of Topology, Comm. Pure Apl. Math. **39**, 17–19 (1986)

[4] M. Flucher. Concentration and compactness of functionals on Sobolev spaces, Dissertation ETH Zürich 1991.

[5] M. Flucher. Extremals for Moser-Trudinger inequality in dimension 2, Comment. Math. Helv. 67 (1992) 471–497