Exercices en Géométrie Différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 1 30 janvier 2006

---

1 Calculer la courbure $\kappa(t)$ de l'ellipse

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

et détérminer tous les $t \in [0, 2\pi[$ avec $\dot{\kappa}(t) = 0$.

2 Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par longueur d'arc telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$. Montrer que

$$\int_a^b \kappa_\gamma(t)\, dt \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Tracer une telle courbe paramétré par longueur d'arc γ avec $\int_a^b \kappa_\gamma(t)\, dt = 0$, $\int_a^b \kappa_\gamma(t)\, dt = 2\pi$, $\int_a^b \kappa_\gamma(t)\, dt = 4\pi$, $\int_a^b \kappa_\gamma(t)\, dt = -2\pi$.

3 On définit la fonction

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} \to \mathbb{R}, \qquad F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2.$$

Montrer que F est lisse. Détérminer l'ensemble des valeurs régulières de F. Faire un déssin de $F^{-1}(0,25)$ et de $F^{-1}(4)$. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $F^{-1}(t)$ est compact?

4 Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$, et si oui, détérminer la dimension et le nombre des composantes connexes

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$

(d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$

(e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0 \right\}$

(f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 1 \right\}$

(g) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = -1 \right\}$

5 Calculer la dérivée de l'application

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Montrer que 1 est une valeur regulière de det.
Indication: Montrer d'abord que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \det\left(\mathrm{Id}_n + tA\right) = \mathrm{tr}A,$$

où Id_n *est l'identité dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.