Exercices en Géométrie Différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 2 — 6 février 2006

---

1 Soit $M := F^{-1}(0,25)$ où F est la fonction défini dans Feuille 1, exercice no.3. Calculer T_pM pour tour $p \in M$.

2 Montrer que $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| = 1 \right\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
Indication: Utilisez les caractérisations de l'espace tangent du cours.

3 Montrer que $O(n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Détérminer la dimension.

4 (La Bande de Moebius.) On définit

$$\psi : \mathbb{R}\times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$$

$$\psi(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(t)(2 + s\cos(t/2)) \\ \sin(t)(2 + s\cos(t/2)) \\ s\sin(t/2) \end{pmatrix}$$

Montrer que $M := \psi(\mathbb{R}\times]-1,1[)$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$. (Attention: ψ n'est pas injective.) Faire un dessin de M. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $N : M \to S^2$ tel que $N(p) \perp T_pM$ pour tout $p \in M$.

5 Soit M une hypersurface dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et $N : M \to S^n$ une application lisse tel que $N(p) \perp T_pM$ pour tout $p \in M$. Montrer que $dN_p(X) \in T_pM$.

Il est recommandé de rendre les solutions des exercices jusqu'à vendredi, 11 février, 15 heures, dans mon casier.

`http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/geodiffm1`