**Exercices en Géométrie Différentielle**
**Bernd Ammann, 2005–2006**
Feuille 5 20 mars 2006

---

## 1

Soit

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = z^2, 0 < z < 1 \right\}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $\Omega_\alpha := (0,1) \times (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Montrer que l'application

$$\psi_\alpha : \Omega_\alpha \to M, \qquad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$$

est une paramétrisation. Donner un atlas fini de $M$. Calculer $\int_M f$ pour $f(x,y,z) = 1$, $f(x,y,z) = z$, $f(x,y,z) = x$.

## 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+_*$ lisse, est $M_f$ la surface de rotation associée à $f|_{(a,b)}$. Calculer

$$\mathrm{vol}(M_f)$$

## 3

Soit

$$S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Calculer

(a) $\int_{S^2} x$

(b) $\int_{S^2} x^2$

(c) $\int_{S^2} x^4$

## 4

On étudie sur le cylindre

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

la fonction

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = e^{-z^2}.$$

Montrer que $f$ est intégrable et calculer $\int_M f$.

---